



**ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА ПРАВА
ІМЕНІ ЛЕОНІДА ЮЗЬКОВА**

ЗАТВЕРДЖЕНО
Рішення методичної ради
університету
29 серпня 2024 року
Протокол № 1

Голова методичної ради

Ірина КОВТУН
(підпис)

(ініціали, прізвище)
29 серпня 2024 року
М.П.

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
для підготовки на першому освітньому рівні
здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра
за спеціальністю 073 Менеджмент
галузі знань 07 Управління та адміністрування
за денною формою навчання**

м. Хмельницький
2024

РОЗРОБНИК:

Доцентка кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку,
кандидатка економічних наук, доцентка
26 серпня 2024 року

_____ Тетяна ФАСОЛЬКО

СХВАЛЕНО

Рішення кафедри фінансів, банківської справи,
страхування та фондового ринку
27 серпня 2024 року, протокол № 1

Завідувачка кафедри, кандидатка економічних
наук, доцентка
27 серпня 2024 року

_____ Алла КРУШИНСЬКА

Деканеса факультету управління та економіки,
кандидатка економічних наук, доцентка
28 серпня 2024 року

_____ Тетяна ТЕРЕЩЕНКО

ЗМІСТ

	Стор.
1. Структура вивчення навчальної дисципліни	— 4
1.1. Тематичний план навчальної дисципліни	— 4
1.2. Лекції	— 5
1.3. Семінарські заняття	— 7
1.4. Самостійна робота студентів	— 50
1.5. Підсумковий контроль	— 54
1.5.1. Питання для підсумкового контролю	— 54
1.5.2. Структура екзаменаційного білета	— 56
2. Схема нарахування балів	— 57
3. Рекомендовані джерела	— 59
4. Інформаційні ресурси в Інтернеті	— 59

1. Структура вивчення навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план навчальної дисципліни

№ теми	Назва теми	Кількість годин											
		Денна форма навчання						Заочна форма навчання					
		Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
			Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС		Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
2.	Основи теорії матриць	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
3.	Система лінійних алгебраїчних рівнянь	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
4.	Функціональна залежність. Основи теорії границь функції	6	2	2	–	–	2	8	1	1	–	–	6
5.	Неперервність функції. Визначні границі	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
6.	Похідна. Диференціал	8	2	2	–	–	4	7	1	–	–	–	6
7.	Основні теореми диференціального числення.	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
8.	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	8	2	2	–	–	4	8	1	1	–	–	6
9.	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	8	2	2	–	–	4	7	1	–	–	–	6
10.	Визначений інтеграл.	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
11.	Числові ряди. Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	8	2	2	–	–	4	6	–	–	–	–	6
12.	Комбінаторика	8	2	2	–	–	4	8	1	1	–	–	6

13.	Основи теорії ймовірності	8	2	2	–	–	4	7	–	1	–	–	6
14.	Основні поняття математичного програмування.	8	2	2	–	–	4	9	1	–	–	–	8
15.	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	8	2	2	–	–	4	9	–	1	–	–	8
16.	Транспортна задача. Метод потенціалів	8	2	2	–	–	4	9	1	–	–	–	8
	Всього годин:	120	32	32	–	–	56	120	10	8	–	–	102

1.2. Лекції

№ з/п	Назва і план теми	Денна форма
1	2	3
1	Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників	2
1.1.	Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного менеджера. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач	
1.2.	Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні.	
1.3.	Булева алгебра: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.	
1.4.	Визначники другого і третього порядків. Визначники k-го порядку.	
1.5.	Властивості визначників.	
	Основи теорії матриць.	2
2.1.	Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.	
2.2.	Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.	
2.3.	Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.	
2.4.	Додавання матриць і множення матриць на число.	
2.5.	Матричні рівняння.	
	Системи лінійних рівнянь.	2
3.1.	Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь.	
3.2.	Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь.	
3.3.	Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).	
3.4.	Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).	
	Функціональна залежність. Границя функції	2
4.1.	Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції.	
4.2.	Властивості функцій: обмеженість і необмеженість, зростання й спадання функції, парність і непарність, періодичність.	

4.3.	Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття оберненої функції.	
4.4.	Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі та великі величини. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі.	
	Неперервність функції. Чудові границі	2
5.1.	Невизначені вирази. Границя монотонної функції.	
5.2.	Число e . Натуральні логарифми.	
5.3.	Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку.	
5.4.	Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій.	
5.5.	Чудові границі границі. Необхідні границі.	
	Похідна. Диференціал	2
6.1.	Застосування похідної в економічних розрахунках.	
6.2.	Означення похідної. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної.	
6.3.	Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних.	
6.4.	Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Односторонні похідні. Похідні вищих порядків.	
	Основні теореми диференціального числення.	2
7.1.	Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки.	
7.2.	Інваріантність форми першого диференціалу.	
7.3.	Диференціали вищих порядків.	
7.4.	Основні теореми диференціального числення.	
	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	2
8.1.	Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Застосування інтегралів у задачах економіки.	
8.2.	Геометричний і механічний зміст інтегралу.	
8.3.	Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування.	
8.4.	Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.	
8.5.	Комплексні числа та дії над ними	
	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	2
9.1.	Інтегрування раціональних дробів.	
9.2.	Інтегрування не правильних дробів.	
9.3.	Інтегрування ірраціональних виразів та виразів, що містять тригонометричні функції.	
9.4.	Тригонометричні підстановки	
	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли	2
10.1.	Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца.	
10.2.	Заміна змінної у визначеному інтегралі.	
10.3.	Інтегрування частинами.	

10.4.	Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.	
	Числові ряди	2
11.1.	Частинні суми ряду. Необхідна умова збіжності ряду.	
11.2.	Ряди з додатними членами.	
11.3.	Теорема порівняння рядів.	
11.4.	Достатні ознаки збіжності рядів із додатними членами: Даламбера. Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші	
	Комбінаторика	2
12.1.	Скінчені множини. Елементи комбінаторики.	
12.2.	Основні поняття комбінаторного аналізу.	
12.3.	Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями. Правила добутку та суми.	
	Основи теорії ймовірності	2
13.1.	Основні поняття теорії ймовірностей.	
13.2.	Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.	
13.3.	Формули повної ймовірності та Баєсса. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики	
13.4.		
	Основні поняття математичного програмування	2
14.1.	Загальна постановка задач.	
14.2.	Економічні приклади моделей лінійного програмування (задача оптимального використання сировини, задача оптимізації виробничої програми).	
14.3.	Задача складання сумішей (раціону).	
	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	2
15.1.	Задача лінійного програмування, форми її запису.	
15.2.	Дослідження задачі лінійного програмування. Основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування.	
15.3.	Розв'язування задач лінійного програмування з допомогою MS Excel	
	Транспортна задача.	2
16.1.	Постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку.	
16.2.	Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів.	
16.3.	Розв'язування транспортної задачі за допомогою MS Excel.	

1.3. Семінарські заняття

Семінарське заняття 1

Тема Предмет та задачі дисципліни. Математична логіка. Розширення шкільних знань про числа. Елементи теорії визначників

Питання для усного опитування та дискусії

1. Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного менеджера. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач
2. Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні.
3. Булева алгебра: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.
4. Визначники другого і третього порядків. Визначники k -го порядку.
5. Властивості визначників.

Аудиторна письмова робота

Підключитися до Google Classroom. Код доступу надає викладач на лекціях.

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : дійсні, раціональні та ірраціональні числа, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. Висловлення та операції над ними. Логічні закони і відношення логічного слідування. Предикати. Область істинності предикатів. Операції над предикатами. Квантори. Теореми та їх види. Прямі й обернені теореми. Необхідні й достатні умови. Визначники другого і третього порядків. Визначники k -го порядку. Властивості визначників.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Життя людини у сучасному насиченому інформаційному просторі неможливе без знання передових інформаційних технологій. Розвиток останніх, неможливий без фундаментальних знань сукупності сучасних математичних методів аналізу та синтезу. Багато людей вважають, що математика ніяк не пов'язана з реальним життям, не цікава і важка для вивчення. Отже, з однієї сторони ми бачимо падіння інтересу до математики, а з іншого боку, ми живемо в більш математичному світі, більш кількісному, ніж будь-коли. Особливість математичних дисциплін полягає в їхній надзвичайній складності для сприйняття сучасними студентами, які жити не можуть без гаджетів, а також розуміння, що це можна використовувати в реальному житті. Питання, які повинні зустрітися в повсякденному житті. Наприклад, яка страхова програма вигідніша? Це не якась знеособлена модель. Це реальна модель, де ми можемо оптимізувати параметри. На скільки років мені потрібна страхівка? Як це впливає на платежі і відсоткові ставки? Розгляд економічних питань у процесі вивчення математики та задач з реальним економічним змістом дозволяють продемонструвати студентам наявність глибоких і плідних зв'язків між математикою і економікою, а через них - і взаємозв'язки математики з проблемами навколишнього світу, але це практично неможливо зробити без комп'ютера і ПЗ, яке візуалізує і моментально демонструє результати проробленої роботи:

Математична логіка - наука про закони математичного мислення.

Висловленням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно або істинне, або хибне, але не одне й інше разом.

Кон'юнкцією (або логічним добутком) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли кожне з висловлень A і B істинне, і є хибним, коли хоча б одне з них хибне.

Диз'юнкція Диз'юнкцією (або логічною сумою) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли хоча б одне з висловлень A або B істинне, і є хибним, коли обидва хибні.

Імплікація Імплікацією (або логічним слідуванням) двох висловлень A і B називають таке висловлення $A \rightarrow B$, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли A - істинне, а B - хибне.

Еквіваленцією двох висловлень A і B називається таке висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B однозначно істинні або однозначно хибні.

Приклад: Марічці потрібно знати 4 екзамена, тоді сесія здана, в протилежному випадку не здана. Читається: «А еквівалентне В», «А *тоді і тільки тоді*, коли В».

№1: Навести кілька прикладів висловлень та їх заперечень.

№2: Навести кілька прикладів диз'юнкції двох висловлень.

№3: Навести кілька прикладів кон'юнкції двох висловлень.

№4: Навести кілька прикладів імплікації двох висловлень.

№5: Навести кілька прикладів еквівалентності двох висловлень.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Приклад: розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

Розв'язування.

$$\text{Маємо: } D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) - 8 \cdot (-6) = -1 (\neq 0),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-10) = -95;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 8 = -110$$

Підставимо значення визначників, одержуємо розв'язок системи :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-95}{-1} = 95;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Відповідь: формули (11) дають розв'язок системи (7): $x = 95; y = 110$.

Визначники третього порядку.

Визначником (детермінантом) третього порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Приклад: обчислимо визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Користуючись означенням,

$$\text{маємо: } D = 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 + 4) - 0 + 2(-2 - 0) = 4 - 4 = 0.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -55 + 14 = -41$$

(перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого; перший рядок множимо на 3 і додаємо до третього). Завдяки властивостям визначників для обчислення визначника третього порядку нам довелося обчислювати не три, а лише один визначник другого порядку.

Аналогічно тому, як ми ввели означення визначника третього порядку через визначники другого порядку, можна ввести поняття про визначники четвертого порядку через визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Практичне завдання: Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером та параметром k .

Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

$$1. \begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix};$$

Семінарське заняття 2

Тема. Основи теорії матриць.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.
2. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.
3. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.
4. Додавання матриць і множення матриць на число.
5. Матричні рівняння. Обернена матриця
6. Поняття про модель Леонтьєва.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання, відповідна тема.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : визначник, порядок визначника, матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця, математична модель, модель Леонтьєва.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1.

Мінором елемента визначника третього порядку, який одержується з даного визначника в результаті викреслювання строчки і стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, мінор елемента 5 визначника
$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
 – це визначник
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3.$$

Говорять, що **елемент займає парне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число парне, і **непарне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число непарне.

Наприклад, елемент 5 в попередньому прикладі займає непарне місце, бо знаходиться в 1-ій стрічці і в 2-му стовпчику, а $1+2=3$ – число непарне.

Алгебраїчним доповненням (мінором із знаком) елемента визначника третього порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком “плюс”, якщо елемент займає парне місце, і із знаком “мінус”, якщо непарне місце.

Приклад, для визначника виду
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
 алгебраїчне доповнення елемента a_1 – це число $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, алгебраїчне доповнення елемента b_3 – це число $B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(алгебраїчне доповнення елементів позначаються відповідними великими буквами з тими ж самими індексами).

Якщо елементи визначника представлені як a_{ij} (i – номер строчки, j – номер стовпчика), тобто якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то, позначивши через M_{ij} мінор елемента a_{ij} , через A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} , маємо:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(Тут $(-1)^{i+j}$ забезпечує зміну знаків: якщо $i + j$ – число парне, то $(-1)^{i+j} = 1$, а якщо $i + j$ – число непарне, то $(-1)^{i+j} = -1$).

Матриці та дії з ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена з чисел або з функцій.

Приклад: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}.$

Цю таблицю записують в круглих або в квадратних дужках (на відміну від визначників). Розміри матриці записують так: $m \times n$, де m – число стрічок, n – число стовпчиків. Так, наведені вище матриці мають відповідно такі розміри: $3 \times 2; 2 \times 3; 2 \times 2$.

Якщо число стрічок матриці дорівнює числу її стовпчиків, то матриця називається квадратною (остання з наведених матриць є квадратною матрицею другого порядку).

Матриця, у якій всього один стовпчик або одна стрічка, називається вектором. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (крім, можливо, елементів, що стоять на головній діагоналі), називається діагональною. Квадратна матриця, у якій всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а інші – нулю, називається одиничною матрицею і позначається E (або I).

Обернена матриця.

Квадратна матриця називається невинродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо виконуються умови:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця.

Можна довести, що будь-яка невинроджена матриця має обернену, причому елементами оберненої матриці є алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці до вихідної матриці A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Практичне завдання: Знайти A^T , B^2 добутки матриць AB і BA , суму $2A + \frac{1}{2}B$, різницю $3AB - B$ та обернену до матриці B .

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

Семінарське заняття 3

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання для усного опитування та дискусії

1. Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь.
2. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь.
3. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса).
4. Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : формули Крамера, прямий хід метода Гаусса, зворотний хід метода Гаусса, матричний метод, ранг матриці, метод обвідних мінорів, зведення матриці до трапецієвидної форми, теорема Кронекера – Капеллі, сумісність (несумісність) системи рівнянь.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Метод Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язком системи (1) називається будь-яка трійка чисел $(x; y; z)$, яка задовольняє систему.

Введемо до розгляду визначник системи D , а також визначники D_x, D_y, D_z за формулами:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \quad (2)$$

(Якщо $D = 0$, то система (1) або несумісна, або має безліч розв'язків)

2. Метод Гаусса.

Існують і інші методи розв'язування систем рівнянь. Покажемо, як розв'язують систему n лінійних рівнянь з n невідомими методом Гаусса. (К. Гаусс, 1777 – 1855 – великий німецький математик); $n > 2$.

Проілюструємо метод Гаусса на прикладі, який ми розв'язали методом Крамера. (тут $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Перше рівняння системи є зведеним. Проілюструємо прямий хід метода Гаусса за допомогою перетворення таблиці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Здійснюючи обернений хід, одержуємо: $z = 0$;

$$y + 0 = 2 \text{ (отже, } y = 2 \text{);}$$

$$x + 2 + 0 = 3 \text{ (отже, } x = 1 \text{)}.$$

Обидві відповіді співпали.

3. Розв'язування систем матричним методом.

За допомогою матриць система трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$AX = B$$

(тут A – матриця виду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X – вектор виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B – вектор виду

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$). Припустимо, що $\det A \neq 0$.

Домножимо обидві частини рівняння (1) зліва на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки, $A^{-1}A = E$, $EX = X$, одержуємо:

$$X = A^{-1}B$$

Зауважимо, що метод оберненої матриці (матричний метод) особливо зручний, коли потрібно розв'язати декілька систем рівнянь з однаковими лівими частинами та різними стовпчиками вільних членів – такі системи мають однакову обернену матрицю.

Практичне завдання: розв'язати системи рівнянь наступними методами:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

1.

$$\begin{cases} (k-4)x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10)x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

Семінарське заняття 4

Тема . Функціональна залежність. Границя функції і послідовності

Питання для усного опитування та дискусії

1. Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції. Послідовність, її границя.
2. Границя функції однієї і багатьох змінних.
3. Основні теореми про границі.
4. Приклади відшукування границь.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: функція однієї змінної, функція багатьох змінних, послідовність, границя послідовності, границя функції однієї змінної, границя функції багатьох змінних, перша «чудова» границя, друга «чудова» границя, теореми про границі.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Функція однієї змінної

Якщо кожному значенню змінної x , що належить деякій області, відповідає одне певне значення другої змінної y , то $y \in$ функція від x : $y = f(x)$.

Сукупність значень x , для яких визначаються значення функції y в силу правила $f(x)$, називається областю визначення функції.

До основних елементарних функцій відносяться:

- 1) степенева функція $y = x^a$ (a - дійсне число);
- 2) показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- 3) логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- 4) тригонометричні функції – $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x$;
- 5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Елементарною функцією називається функція, яка може бути заданою однією формулою виду $y = f(x)$, де вираз справа складений із основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і взяття функції від функції.

Алгебраїчною функцією називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння виду

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0,$$

де $P_0, P_1, \dots, P_n$ – многочлени від x .

До алгебраїчних функцій належать такі елементарні функції:

а) ціла раціональна функція (многочлен)

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

(тут $a_0, a_1, \dots, a_n$ – коефіцієнти, n – ціле невід'ємне число – степінь многочлена);

б) дробово-раціональна функція

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

(тут a_i, b_j – коефіцієнти, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, n та m – цілі невід’ємні числа – степені многочленів у чисельнику і знаменнику);

в) **Ірраціональна функція**: якщо в формулі $y = f(x)$ у правій частині виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функція $y = f(x)$ називається ірраціональною (наприклад, $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}$).

Функція, яка не є алгебраїчною, називається **трансцендентною** (наприклад, $y = e^{-x}$).

Функція двох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох, незалежних одна від другої, змінних величин x і y з деякої області їх зміни D відповідає певне значення величини z , то говорять, що z є **функцією двох незалежних змінних** x і y , визначено в області D . ($z = z(x, y)$; ($z = f(x, y)$; $z = F(x, y)$ і т.п.)

Сукупність пар (x, y) значень x і y , при якій визначена функція $z = z(x, y)$, називається **областю визначення** цієї функції.

Областю визначення функції може бути вся площина або деяка її частина. Лінія, яка обмежує дану область, називається її **границею**. Точки області, які не лежать на границі, називаються внутрішніми точками області. Область, що складається із самих тільки внутрішніх точок, називається **відкритою** (незамкненою). Якщо до області відносяться і точки границі) то область **замкнена**.

3 Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Перед тим, як перейти до вивчення питання про границю послідовності і границю функції, пригадаємо з лекції що таке нескінченно мала і нескінченно велика величини.

Зазначимо, що з усієї множини змінних величин можна виділити такі, у яких процес зміни відбувається особливим чином.

Означення. Змінна величина x називається **нескінченно малою**, якщо у процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε , тобто $|x| < \varepsilon$. Зокрема, єдиного нескінченно малою величиною серед сталих величин є величина 0.

Нескінченно малі величини, позначають, як правило, буквами грецького алфавіту α, β, γ .

Означення. Змінна величина x називається **нескінченно великою**, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, як завгодно великого, наперед заданого додатного числа N , тобто $|x| > N$.

Наприклад, величина 3^n при необмеженому зростанні n є нескінченно великою величиною.

Постійна величина a називається границею змінної величини x , якщо $|x - a|$ – нескінченно мала величина (тобто $|x - a| < \varepsilon$). Якщо a є границею змінної величини x , то говорять, що x прямує до границі a і позначають:

$$\lim x = a, \text{ або } x \rightarrow a.$$

Звідси випливає, що $\lim \alpha = 0$, де α – нескінченно мала величина. Нескінченно велика величина x скінченної границі не має ($\lim x = \pm\infty$).

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай залежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 (це означає, що x приймає значення, як завгодно близькі до x_0 , але відмінні від x_0): $x \rightarrow x_0$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для всіх значень x , що досить мало відрізняються від числа x_0 , відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Інакше кажучи, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які належать δ -околу точки x

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

то число A є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. (Це – означення границі, запропоноване Коші).

Практичне завдання: Знайти границі функції:

Завдання 1. Знайти границю функції.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3}{3 + 7x};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 3}{7 - x};$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x + 2}{x^2 + 5x + 6};$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 7x^2 + 4x + 2);$

Завдання 2. Знайти границю функції.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{5x + x^2 + 7};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{\cos x - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - 2x + 1};$

Завдання 3. Знайти границю функції.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3};$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 3 - x}{x - 1};$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 - 8x - 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4};$

Семінарське заняття 5

Тема 7. Неперервність функції. Точки розриву

Питання для усного опитування та дискусії

1. Неперервність функції однієї змінної.
2. Точки розриву, їх класифікація.
3. Теорема про неперервні функції.
4. Неперервність функції двох змінних.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : неперервність функції однієї змінної у точці (на інтервалі), неперервність функції двох змінних у точці (в області), точка розриву першого роду, точка розриву другого роду, точка ліквідного розриву, точка нескінченного розриву, теореми Вейєрштрасса, теореми Больцано - Коші.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо ця функція визначена в якому-небудь околі цієї точки (включаючи дану точку) і якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція називається неперервною в інтервалі, якщо вона неперервна у всіх точках інтервалу. Геометрично неперервність функції у замкнутому інтервалі означає, що графіком функції є суцільна лінія.

Якщо для функції $y=f(x)$ умова неперервності в точці x_0 порушена, то ця точка називається точкою розриву функції. Точка розриву функції називається точкою розриву першого роду, якщо у цій точці функція має ліву і праву скінченні границі. Якщо, зокрема, ці границі рівні між собою, але функція $f(x)$ при $x=x_0$ не визначена (або визначена, проте не рівна цим границям), то x_0 називають точкою ліквідного розриву. Всі точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називаються точками розриву другого роду (це, зокрема, точки нескінченного розриву).

Мають місце так звані **перша і друга “чудові” границі:**

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (\text{перша “чудова” границя});$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e \quad (\text{друга “чудова” границя});$$

Так наприклад, за допомогою першої “чудової” границі знаходимо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = 1.$$

За допомогою другої “чудової” границі знаходимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k} \cdot k} = e^k.$$

Практичне завдання: Знайти границі функції:

$$\begin{aligned}
1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{1+5x} \right)^x. \quad & 2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-1} \right)^{-2n}. \\
3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 3(x-\pi)}{\sin 2(\pi-x)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x. \quad & 4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}. \\
5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x^2}{\cos 3x}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5n} \right)^n. \quad & 6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x^2}{\sin 3x^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n. \\
7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arc} \sin 6x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{3x}. \quad & 8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x}{5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x} \right)^{x/2}. \\
9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 5\pi x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+1} \right)^{5x}. \quad & 10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 4x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-2} \right)^{3x}.
\end{aligned}$$

Семінарське заняття 6

Тема Похідна. Диференціал

Питання для усного опитування та дискусії

1. Похідна функції однієї змінної, її геометричний, фізичний, економічний зміст.
2. Таблиця похідних.
3. Частинні похідні та їх економічні застосування.
4. Диференціал функції однієї та двох змінних.
5. Похідні і диференціали вищих порядків.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : похідна, частинна похідна, геометричний зміст звичайної похідної, фізичний зміст звичайної похідної, економічний зміст звичайної і частинної похідної, таблиця похідних, диференціал функції однієї змінної, диференціал функції двох змінних, похідні і диференціали вищих порядків, формула Тейлора (випадок функції однієї і двох змінних).

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Похідна, її фізичний, геометричний та економічний зміст.

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому проміжку. Знайдемо приріст функції в точці x :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ та знайдемо $\lim_{\Delta x \rightarrow x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (якщо ця границя існує).

Похідною функції $y = f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну позначають так: $f'(x)$; y_x ; $\frac{dy}{dx}$

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається **диференціюванням** цієї функції.

Дамо **економічну інтерпретацію** похідної.

Нехай витрати виробництва k є функцією обсягу продукції x .

Границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$ називають **граничними витратами виробництва**. Нехай, наприклад, функція витрат $k(x)$ має вигляд:

$$k(x) = 400x - 0,01x^2$$

Знайдемо $k'(x)$:

$$k'(x) = 400 - 0,02x.$$

Оскільки реальний економічний зміст x мають лише цілі x , то можна написати наближену рівність:

$$k(x+1) - k(x) = k'(x), \Delta x = 1.$$

Таким чином, функція $k'(x)$ показує, наскільки зміняться витрати при збільшенні виробництва на одиницю. Наприклад, $k'(50) = 400 - 0,02 \cdot 50 = 399$. Це означає, що при збільшенні обсягу виробництва з 50 до 51 одиниці витрати виробництва зростуть на 399 одиниць.

Похідні від елементарних функцій.

Правила диференціювання (теореми про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки)

Користуючись означенням похідної, можна знайти похідні від таких елементарних функцій.

1) $y = C$ (C – стале число). Покажемо, що $C' = 0$: $\Delta y = C - C = 0$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. (Студентам рекомендується дати геометричне тлумачення цього факту).

2) $y = \sin x$. Покажемо, що $y' = \cos x$. Маємо: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

$$\text{Знаходимо } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

(ми скористалися першою “чудовою” границею).

При знаходженні похідних елементарних функцій користуються теоремами про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки.

4 Диференціювання складної, наявної, оберненої функції

а) Має місце така теорема про **диференціювання складної функції**.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці похідну $u'_x = \varphi'(x)$, а функція $y = F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $F'(u) = y'_u$, тоді складна функція $y = F(\varphi(x))$ у вказаній точці x теж має похідну, яка дорівнює $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \ln \sin x$. Тут $y = \ln u$, де $u = \sin x$. Маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Аналогічно, якщо $y = F(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x^{\frac{1}{3}}$. Тут $y = u^2$, де $u = \sin v$, причому $v = x^{\frac{1}{3}}$. Маємо: $y'_x = 2 \sin x^{\frac{1}{3}} \cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \sin 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{x}$.

Таблиця основних формул диференціювання

Наведемо таблицю основних формул диференціювання.

Функція	Її похідна	Функція	Її похідна
c	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\text{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$tg x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	a^x	$a^x \ln a$
$ctg x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a} \left(= \frac{\log_a e}{x} \right)$ (зокрема, $\frac{1}{x}$ при $a = e$)

Практичне завдання: Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1. а) $y = 2ktg \sqrt{x} - kx^3$; б) $y = \ln \frac{k+3x}{k-2x}$; в) $y = (kx^4 - 3x + 4)^{k+2}$; г) $y = \arctg \frac{k}{x}$; д) $y = e^{2x} \cos \frac{2x}{3k}$.

2. а) $y = \arcsin e^{3xk}$; б) $y = \ln \frac{ktgx+1}{tgx-2}$; в) $y = x^{2k} e^{x^3}$; г) $y = (x^5 - kx^3 + 3)^{k+3}$; д) $y = \sin \frac{x}{k} e^{kx^2}$.

3. а) $y = tg x \cdot \cos 3kx$; б) $y = \ln \frac{k+x^2}{x^{2k}-1}$; в) $y = (x^6 - kx^4 + 3x + 5)^{2k}$; г) $y = \frac{1}{x} \arctg kx^5$; д) $y = \sin \sqrt[3]{x+2k}$.

4. а) $y = \frac{\cos^2 x}{k + \cos x}$; б) $y = (kx^5 - 4x^2 + 3)^{3k}$; в) $y = \sqrt{x+k} \cdot tg 2kx$; г) $y = \arctg \frac{5x+2}{k+3}$; д) $y = 3^{kx} \cdot \ln \frac{4x+k}{4x-k}$.

5. а) $y = (2+kx)tg 2x$; б) $y = \arctg \frac{x+2k}{3x-k}$; в) $y = \ln \frac{x^2+3kx}{x+k}$; г) $y = (kx^4 - 2kx^3 + 5)^3$; д) $y = e^{2x}(\sin kx + 2k \cos x)$.

Семінарське заняття 7

Тема . Основні теореми диференціального числення функції однієї змінної

Питання для усного опитування та дискусії

1. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.
2. Правила Лопіталю.
3. Дослідження функції однієї змінної на монотонність, екстремум і на напрямок вигнутості.
4. Асимптоти графіка функції.
5. Загальна схема побудови графіка функції.
6. Застосування похідної в економіці.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші, перше правило Лопіталю, друге правило Лопіталю, вертикальна асимптота, похила асимптота, монотонне зростання, монотонне спадання, екстремум (мінімум, максимум), вгнутість, увігнутість, точка перегину.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

ЗТеореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші

Диференціальне числення застосовують для дослідження функцій. Наведемо теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі $[x_1, x_2]$, приймає своє найбільше (або найменше) значення у внутрішній точці ξ цього інтервалу: $x_1 < \xi < x_2$. Якщо в точці ξ похідна функції $f(x)$ існує, то вона обов'язково дорівнює нулю: $f'(\xi) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$, диференційована у всіх його внутрішніх точках та приймає на кінцях інтервалу рівні значення, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ і диференційована у всіх його внутрішніх точках, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ та диференційовні у всіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ у цих точках не перетворюється в нуль, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Правило Лопіталю

Наведемо правило Лопіталля граничного переходу, яким зручно користуватися при дослідженні функцій.

Правило Лопіталля. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (або $x \rightarrow \infty$) сумісно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю скінченну чи ні, то і відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varepsilon(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varepsilon'(x)}.$$

Приклад, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\infty}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Деколи цим правилом доводиться користуватися декілька разів.

Загальна схема дослідження функцій

Можна рекомендувати таку схему дослідження функцій

- 1) Знайти область визначення функції її точки розриву.
- 2) Вияснити питання про парність, періодичність, характерні точки функції.
- 3) Визначити інтервали знакосталості та монотонності функції.
- 4) Знайти екстремуми функції.
- 5) Дослідити функцію на вигнутість і увігнутість.
- 6) Знайти вертикальні і похилі графіка функцій (якщо вони існують)
- 7) На основі одержаної інформації побудувати графік функції.

Зауважимо, що окремі пункти цієї схеми можна переставляти місцями. Можна також проводити додаткове дослідження в залежності від функції – наприклад, шукати $\lim f(x)$ і т.п.

Завдання біля дошки: Провести повне дослідження та побудувати графік функцій

$$y = \frac{x^3}{2 - x^3}.$$

Об'єднаючи одержану інформацію, будуюмо графік функції $y = \frac{x^3}{2 - x^3}$ (рис.1)

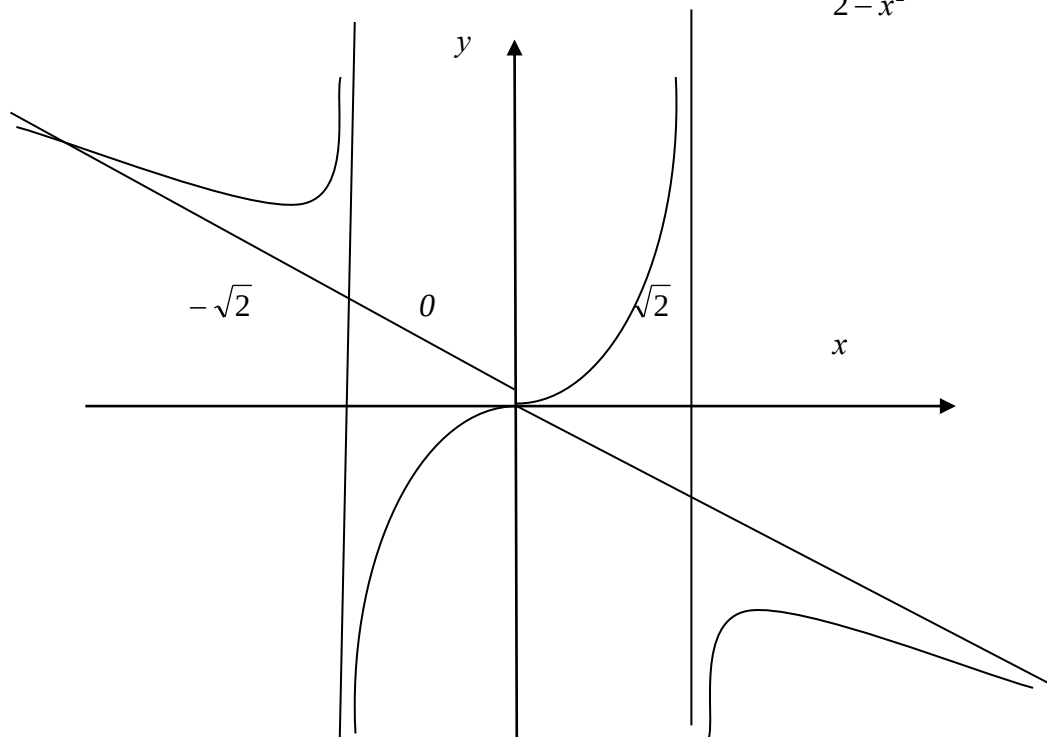


Рис.1.Графік функції $y = \frac{x^3}{2-x^2}$

Застосування похідної в економіці

У практиці економічних досліджень широке застосування одержали виробничі функції, які використовуються для виявлення залежностей випуску продукції від витрат ресурсів, при прогнозуванні розвитку галузей, при розв'язуванні оптимізаційних задач. Наприклад, якщо виробнича функція $y = f(x)$ встановлює залежність випуску продукції y від витрат ресурсу x , то $f'(x)$ називають граничним продуктом; якщо ж $y = f(x)$ встановлює залежність витрат виробництва y від об'єму продукції x , то $f'(x)$ називають граничними витратами.

Для вивчення відносної зміни приросту функції $y = f(x)$ при малих відносних змінах приросту аргументу x використовують коефіцієнт еластичності функції (або еластичність).

Нехай задана функція $y = f(x)$, а Δx і Δy – прирости незалежної і залежної змінної, причому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Відносний приріст залежної змінної – це вираз виду $\frac{\Delta y}{y}$. Відношення відносно приросту функції до відносного приросту незалежної змінної $\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$ показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Представимо його у формі:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) \stackrel{!}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) \stackrel{!}{=} f'(x) \cdot \frac{x}{y}$$

Границя відношення відносного приросту функції $y = f(x)$ до відносного приросту незалежної змінної, коли $\Delta x \rightarrow 0$, називається еластичністю функції $y = f(x)$ відносно змінної x .

Еластичність функції $y = f(x)$ позначимо символом $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Еластичність функції допускає таку економічну інтерпретацію: еластичність – це наблизений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

$$y = -0,14 + 1,37x.$$

Семінарське заняття 8

Тема. Невизначений інтеграл. Комплексні числа

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача інтегрального числення. Первісна.
2. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.
3. Заміна змінних та інтегрування по частинах у невизначеному інтегралі.
4. Комплексні числа, операції над ними.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: первісна, інтеграл, таблиця інтегралів, безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінних), інтегрування по частинах, комплексне число, алгебраїчна форма комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Невизначений інтеграл

Первісна функція. невизначений інтеграл.

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x) = f(x)dx$ або $F'(x) = f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

можна легко довести основні його властивості

- 1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

- 2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + c.$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. В цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими математичними операціями.

- 3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx.$$

$$\text{Дійсно: } A \int f(x)dx = A(F(x) + c) = AF(x) + c_1 \quad (c_1 = AC).$$

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af , оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

- 4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Таблиця найпростіших інтегралів.

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливність наступних табличних формул.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0).$
3. $\int e^x dx = e^x + c.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1).$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+\alpha} \right| + c \quad (\alpha \neq 0).$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$
16. $\int \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$

Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та по частинах.

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx$, який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x = \varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

Б) Формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

Наприклад.

$$\text{№1. } \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

$$\text{№2. } \int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Комплексним числом називається вираз виду $z=a+bi$, де a та b – дійсні числа.

Тут a – дійсний, а b – уявна частина комплексного числа, а $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця (зауважимо, що деколи уявною частиною називають bi) Загальноприйняті такі позначення:

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

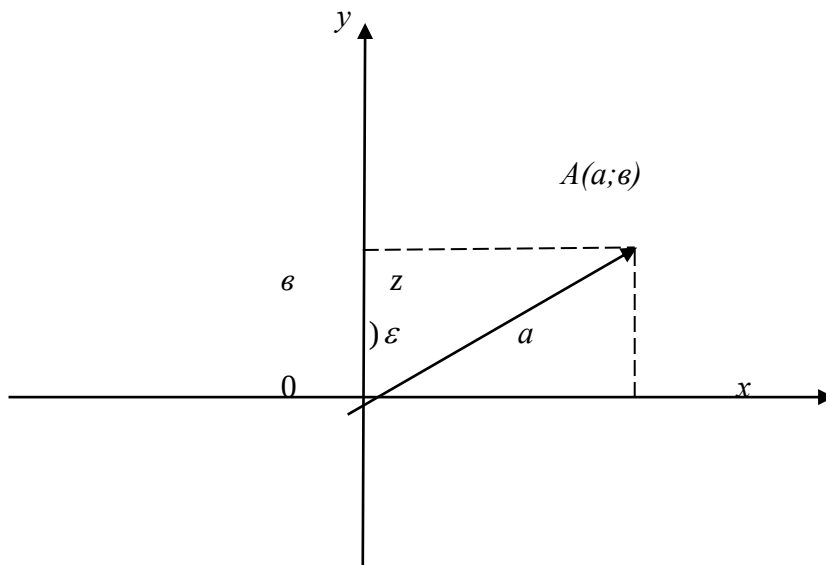
(вод re – дійсний, $imaginaire$ – уявний - дійсний,)

Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними ($z_1 = z_2$), якщо рівні їх дійсні та уявні частини:

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

Комплексне число дорівнює нулю, якщо $a=b=0$ якщо $b=0$. то комплексне число співпадає з дійсним: $a+bi=a$. Якщо $a=0$, то $z=bi$ – одержуємо чисто уявне число. Числа $a \pm bi$ називаються спряженими. Число $z_1 = -a - bi$ називається протилежним до числа z .

Комплексні числа можна зобразити точками площини (в той час, як дійсні числа – точками числової осі ox). Комплексне число $a+bi$ ототожнюється з парою чисел (a,b) координатами точки площини (в прямокутній декартовій системі координат $хоу$) оскільки кожній точці A площини відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$, будь-яке комплексне число можна також інтерпретувати геометрично як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b) (рис.1)



Розглянемо дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Нехай задано два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ (надалі така форма їх запису називається алгебраїчною). Означимо основні дії з ними-додавання, віднімання, множення і ділення.

1) Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z , дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина-сумі уявних частин чисел z_1 і z_2 : $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Операція додавання комплексних чисел асоціативна: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

та комутативна: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2) Різницею $z_1 - z_2$ комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число z , що є сумою числа z_1 та числа, протилежного до z_2 : $z = z_1 + (-z_2) = a_1 + b_1i + (-a_2 - b_2i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i$.

3) Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число

$$z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Таким чином, добуток визначається за звичайними правилами алгебри:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - a_1b_2i + b_2b_1i + b_2b_1i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$$

Операція множення комплексних чисел асоціативна:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

та комутативна: $z_1z_2 = z_2z_1$.

4) Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z таке, що $z_1 = z \cdot z_2 \cdot (z_2 \neq 0)$.

Практично комплексні числа ділять так:

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 - (b_2i)^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел пов'язані законом дистрибутивності: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Практичне завдання:

I. Методи інтегрування

Завдання 1 Безпосереднє інтегрування

$$\int x^3 \sqrt[4]{x^5} dx =$$

$$\int (5 \sin x - 3 \cdot 4^x + \frac{1}{x}) dx =$$

$$\int (2x - 5)(x + 1) dx$$

Завдання 2

Метод підстановки (метод заміни змінної)

$$\int_0^1 (2x^3 - 1)x^2 dx$$

$$\int (2x - 5)^3 dx$$

$$\int e^{x^2-2} dx$$

Завдання 3

Метод інтегрування частинами

$$\int x^2 \sin 5x dx$$

$$\int (x - 1) \sin(2x - 1) dx$$

$$\int (2x^2 - 3x + 2)e^{2x} dx =$$

II. Дано комплексні числа z_1, z_2, z_3 . Знайти:

а) $z_1 + z_3$;

б) $z_2 \cdot z_3$;

в) $\frac{z_2}{z_3} - z_1$

г) $\frac{1}{z_1} + z_2$.

1. $z_1 = 7 + 6i$; $z_2 = 8 + 4i$; $z_3 = 10 - 6i$.

2. $z_1 = 8 + 6i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 9 - 3i$.

3. $z_1 = 7 + 8i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 7 - 9i$.

4. $z_1 = 9 + 6i$; $z_2 = 7 - 3i$; $z_3 = 8 - 5i$.

Семінарське заняття 9

Тема. Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів

Питання для усного опитування та дискусії

1. Найпростіші дроби та їх інтегрування.
2. Інтегрування правильних і неправильних раціональних дробів.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів.
4. Інтегрування тригонометричних функцій.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : найпростіші (елементарні) дроби 1-го, 2-го, 3-го, 4-го типу, правильний раціональний дріб, неправильний раціональний дріб, найпростіші ірраціональності, три випадки інтегровності диференціального бінома, універсальна тригонометрична підстановка.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах

Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування дробів.

Для інтегрування раціональних дробів перш за все перевіряють, правильний дріб чи ні. Якщо дріб неправильний, потрібно виділити цілу частину та правильний дріб, шляхом ділення чисельника на знаменник. Ціла частина – це многочлен, який легко інтегрується. Дробову ж частину записують у вигляді суми найпростіших раціональних дробів і інтегрують.

Зупинимося детально на інтегруванні дробів 1-го, 2-го, 3-го та 4-го типів

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c;$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \\ + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Приклад №1. Знайти $\int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 4} dx$.

Розв'язок. Оскільки дріб неправильний, поділимо чисельник на знаменник, таким чином,

$$\int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 4} dx = \int \left(x^3 - 3x + \frac{12x-1}{x^2+4} \right) dx = \int x^3 dx - 3 \int x dx + \int \frac{12x-1}{x^2+4} dx = \\ = \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + 6 \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c.$$

Приклад №2. Знайти $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)}$.

Розв'язок. Представимо правильний підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}. \text{ Маємо:}$$

$$x = Ax + 2A + Bx^2 - 2B + Bx + Cx^2 - 2Cx + c. \text{ Система для визначення } A, B, C:$$

$$\begin{cases} \tilde{N} + B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \\ 2A - 2B + C = 0. \end{cases}$$

$$\text{Розв'язуючи її, одержуємо: } A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}, C = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{Отже, } \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{\frac{1}{3} dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{2}{9} dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{2}{9} dx}{x+2} = \frac{1}{3} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \\ - \frac{2}{9} \ln|x+2| + c = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{2}{9} \ln|x+2| + c.$$

Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції – через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Інтеграл від ірраціональної функції не завжди можна виразити через елементарні функції. Нижче будуть розглянуті випадки, коли за допомогою тієї чи іншої підстановки задача інтегрування ірраціональних чи трансцендентних функцій зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій і, отже, вирішується за допомогою елементарних функцій.

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1} = \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = 4 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + 1} = 4 \left(\int t^2 dt - \int \frac{t^2 dt}{t^3 + 1} \right) =$

$$= 4 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \ln |t^3 + 1| \right) + c = \frac{4}{3} \left(x^{\frac{3}{4}} - \ln \left| x^{\frac{3}{4}} + 1 \right| \right) + c.$$

Приклад. Звести інтеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$ до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Розв'язок. Виконаємо заміну змінних $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Звідси

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

$$\text{Отже, } \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2} = -4 \int t \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2 (1+t^2)^2} \frac{tdt}{(1+t^2)^2} = -4 \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2}.$$

Інтегрування тригонометричних функцій.

$$\text{Приклад. } \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + c.$$

В деяких випадках більш доцільно користуватися не універсальною тригонометричною підстановкою (якщо вона призводить до громіздких виразів під знаком інтеграла), а іншими методами.

1) Інтеграл виду $\int R(\sin x) \cos x dx$ зручно знаходити за допомогою тригонометричної підстановки $t = \sin x$. Тоді $dt = \cos x dx$, і ми одержуємо $\int R(t) dt$.

2) Аналогічно задача знаходження інтеграла виду $\int R(\cos x) \sin x dx$ розв'язується шляхом введення підстановки $t = \cos x$.

3) Щоб перейти від інтеграла $\int R(tgx) dx$ до інтеграла від раціональної функції, досить виконати підстановку $t = tgx$. Дійсно при цьому $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, і ми одержуємо інтеграл від раціональної функції виду

$$\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Якщо $\sin x$ та $\cos x$ містяться під знаком інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$ лише в парних степенях, то доцільною є підстановка $t = tgx$. При цьому

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайдемо інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + c = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + c. \end{aligned}$$

Практичне завдання: Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$.

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}$

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 7x + 12} dx$

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx$.

Семінарське заняття 10

Тема. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли

Питання для усного опитування та дискусії

1. Визначений інтеграл (означення, властивості, способи обчислення).
2. Невласні інтеграли першого і другого роду.
3. Подвійні та потрійні інтеграли, їх властивості, способи обчислення.
4. Застосування інтегралів.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : інтегральна сума, визначений інтеграл, геометрична інтерпретація визначеного інтеграла, заміна змінних у визначеному інтегралі, інтегрування по частинах у визначеному інтегралі, невластні інтеграли першого роду, невластні інтеграли другого роду, подвійні інтеграли, правильна область (в напрямку осі Ох, осі Оу), двократні інтеграли, потрійні інтеграли, трьох кратні інтеграли, обчислення площ, об'ємів, довжини дуги за допомогою інтегралів.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Визначений інтеграл. Невласні інтеграли 1-го і 2-го роду.

Якщо при будь-якому діленні відрізка $[a;b]$ такому, що $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ і при довільному виборі точок ξ_i сума $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ прямує до однієї й тієї ж самої границі I , то говорять, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, а границю I називають визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a;b]$ і позначають $\int_a^b f(x) dx ::$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_i \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Число a називають нижньою межею інтеграла, ab – його верхньою межею. Проміжок $[a;b]$ називають відрізком інтегрування, а x – змінною інтегрування.

Властивості визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має властивості, які можна сформулювати за допомогою знаків рівностей або нерівностей.

1) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } \int_a^b Af(x)dx &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\Delta x_i = \\ &= A \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = A \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

2) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Це} \quad \quad \quad \text{дійсно} \quad \quad \quad \text{так,} \quad \quad \quad \text{оскільки} \\ \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i))\Delta x_i = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i \right) = \\ &= \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx. \end{aligned}$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Дійсно, якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна від неперервної функції $f(x)$, то, оскільки $\int_a^x f(t)dt$ – також її первісна, маємо:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c^*, \text{ де } c^* - \text{ стала.}$$

Для визначення цієї сталої покладемо в останній рівності $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + c^*, \text{ або } 0 = F(a) + c^*. \text{ Звідси одержуємо: } c^* = -F(a). \text{ Таким чином,}$$

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Підставивши $x = b$, одержуємо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами. Цю формулу записують ще так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x) \in C[a;b]$, можна ввести нову змінну t за

формулою: $x = \varphi(t)$. Якщо:

а) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

б) $\varphi(t), \varphi'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha; \beta]$;

в) $f(\varphi(t))$ – визначена і неперервна функція на відрізку $[\alpha; \beta]$, то має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклад. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \left| \begin{matrix} 1+x=t^2 & x=0 & t=1 \\ dx=2tdt & x=1 & t=\sqrt{2} \end{matrix} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} t - 2tdt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$

При потребі користуються формулою інтегрування по частинах:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+1) & du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = (e-1) \ln(e-1+1) -$
 $- 0 - \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = e-1 - \int_0^{e-1} dx + \int_0^{e-1} \frac{d(x+1)}{x+1} = e-1 - x \Big|_0^{e-1} + \ln|x+1| \Big|_0^{e-1} = e-1 - (e-1) + \ln(e-1+1) -$
 $-\ln 1 = e-1 - e+1+1 = 1.$

Невласні інтеграли.

I. Розглянемо інтеграли з нескінченними границями, або невласті інтеграли першого роду.

Нехай $x \in [a; \infty)$, а функція $f(x)$ неперервна. Якщо існує скінченна границя

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то вона називається невласним інтегралом від $f(x)$ на проміжку $[a; \infty)$ і

позначається так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$

Якщо $\int_a^b f(x)dx$ при $b \rightarrow +\infty$ не має скінченної границі, то говорять, що $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не існує (або розбігається).

Кратні інтеграли. Подвійні і потрійні інтеграли – це узагальнення поняття визначеного інтеграла на інтеграл по плоскій області (частині площини) та на інтеграл по об'ємній замкненій області. Обчислення подвійних інтегралів зводиться до двохкратного інтегрування, а потрійних – до трьохкратного інтегрування. При вивченні теми «Кратні інтеграли» слід звернути особливу увагу на поняття правильної двохвимірної (та правильної трьохвимірної) областей, на порядок розстановки меж інтегрування, на правила заміни змінних при інтегруванні.

Економічне застосування інтеграла.

Визначений інтеграл має багато інших геометричних, фізичних, механічних застосувань тощо. Зупинимось на деяких його економічних застосуваннях, що пов'язані з сумарними ефектами.

- 1) За допомогою визначеного інтеграла можна визначати загальний дохід, якщо відомий граничний прибуток. Нехай, наприклад, функція граничного доходу задається формулою

$$MR = -0.04x + 12,$$

де x – кількість поданих одиниць товару. Визначимо дохід від продажу 100 одиниць товару.

Розв'язок
$$M = \int_0^{100} (-0.04x + 12)dx = \left(-0.04 \frac{x^2}{2} + 12x \right) \Big|_0^{100} = (-0.02x^2 + 12x) \Big|_0^{100} = 1000$$

(грн.)

- 2) Визначений інтеграл дозволяє розв'язувати задачу визначення додаткової вартості.

Нехай задано функції пропозиції $S = 15p$ та попиту $q = p^2 - 80p + 1500$. (рис. 3).

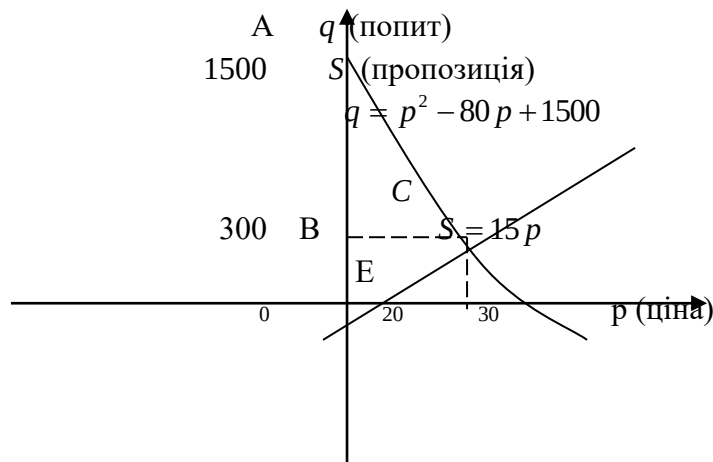


Рис. 3. задача про додаткову вартість.

Визначаємо, що $q = S$ при $p = 20$. При цьому попит дорівнює 300 одиниць. Дохід за продану продукцію становить для виробника $20 \cdot 300 = 6000$ грн та зображується площею прямокутника $OBCE$. Економічний зміст має ціна за одиницю товару, більша за 20 грн (якщо попит перевищує пропозицію, то, звичайно, знайдуться покупці, які куплять товар дорожче, ніж за 20 грн). мірою справжньої корисності товару, вважають економісти, є площа фігури $OBCE$. Площа заштрихованої фігури (криволінійного трикутника CDE) називається додатковою вартістю. Визначимо цю площу за допомогою інтегралу

$$\int_{20}^{30} (p^2 - 80p + 1500)dp = \left(\frac{p^3}{3} - 80 \frac{p^2}{2} + 1500p \right) \Big|_{20}^{30} = 1333.33 \text{ грн.}$$

Отже, додаткова вартість дорівнює 1333,33 грн.

Приклад. Для подолання наслідків стихійного лиха в деяку місцевість надходять благодійні внески, розмір яких наближено описується функцією $a(t) = 30e^t$ ($t \in [0;3]$), причому t вимірюється в днях від моменту стихійного лиха, а $a(t)$ – в тисячах гривень. Визначити:

- а) скільки внесків надійде на другий день ($t = 2$)?
- б) яка сума внесків очікується за три дні з моменту початку стихійного лиха?

Розв'язок. а) Визначимо $a(2)$:

$$a(2) = 30e^2 \approx 221.6 \text{ тис. грн.}$$

- б) Сумарні внески за три дні визначимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$\int_0^3 30e^t dt = 30e^t \Big|_0^3 = 30(e^3 - 1) \approx 572.4 \text{ тис. грн.}$$

Аналогічно розв'язуються задачі про епідеміологічний контроль, про потребу підприємства в матеріалах, про рівень затрат на ремонт приладів, про чисельність населення та ін.

3) Нехай виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$y = (4 + t)e^{2t}, t \in [0; 3]$$

(y – об'єм випуску продукції (тис. шт.), t – час (роки)). Потрібно знайти об'єм Ω продукції, виготовленої за 3 роки.

Розв'язок. Об'єм Ω виготовленої продукції дорівнює визначеному інтегралу

$$\Omega = \int_0^3 (4 + t)e^{2t} dt.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$\Omega = \left| \begin{array}{ll} u = 4 + t & du = dt \\ dv = e^{2t} dt & v = \frac{1}{2} e^{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2} (4 + t)e^{2t} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 e^{2t} dt = \frac{7}{2} e^6 - 2 - \frac{1}{4} (e^6 - 1) = \frac{13}{4} e^6 - \frac{7}{4} \approx 11309 \text{ (тис. шт.)}$$

шт.)

Отже, за 3 роки буде виготовлено приблизно 1309 тис. шт. одиниць продукції.

4) За допомогою кривої Лоренца OBA (рис. 11), що відображає залежність долі прибутків від долі населення, оцінюють нерівномірність в розподілі прибутків населення (якщо розподіл прибутків рівномірний, то крива Лоренца вироджується в пряму OA).

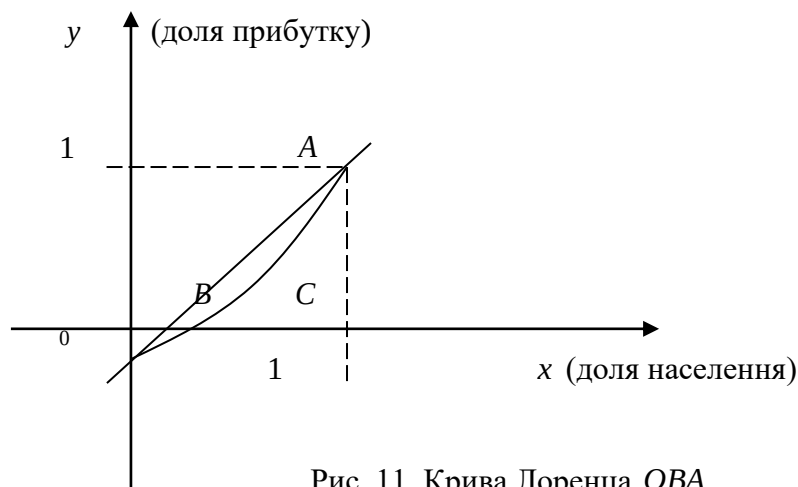


Рис. 11. Крива Лоренца OBA

Мірою цієї нерівномірності є коефіцієнт Джіні k : $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAB}}$, де S_{OAB} – площа OBA ,

а $S_{\Delta OAB}$ – площа трикутника OAC . При цьому чим більше k , тим нерівномірніший розподіл прибутків населення.

Нехай, наприклад, $y = x^4$. Тоді $S_{OAB} = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 0.3$. Оскільки

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, то $k = 0,6$. Розподіл прибутків населення істотно нерівномірний. Якщо ж

$y = \frac{x^2 + 2x^3}{3}$, то аналогічно можна показати, що $k = \frac{4}{9} \approx 0,44$. В цьому випадку розподіл прибутків у меншій мірі нерівномірний.

Семінарське заняття 11

Тема. Числові ряди

Питання для усного опитування та дискусії

1. Означення ряду, його суми. Приклади.
2. Властивості числових рядів.
3. Необхідна ознака збіжності ряду.
4. Ознаки Даламбера, Коші. Інтегральна ознака збіжності ряду.
5. Знакопочергові та знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца. Абсолютна і умовна збіжність

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : ряд, частинна сума ряду, сума ряду, властивості числових рядів, необхідна ознака збіжності ряду, ознаки порівняння рядів з додатними членами, гранична ознака порівняння рядів з додатними членами, ознака Даламбера, ознака Коші, інтегральна ознака збіжності ряду, знакоперемінний ряд, знакозмінний ряд, ознака Лейбніца, абсолютна збіжність, умовна збіжність.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Вираз виду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ (1) називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – членами ряду u_n – (загальний член ряду).

Властивості ряду істотно відрізняють від властивостей скінченної суми. Наприклад, для ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

маємо:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0;$$

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - \dots - 0 = 1.$$

Цей факт довго сприймався як парадокс (17-19 століття). На базі теорії границь Коші в 1821 р. дав означення суми збіжного ряду, після чого стала зрозумілою різниця між збіжними та розбіжними рядами.

Сума скінченного числа n перших членів ряду називається n -ною частинною сумою ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Таким чином, $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2$ і т. д.

Якщо при $n \rightarrow \infty$ існує границя послідовності частинних сум членів даного ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то ряд називається збіжним, а число S – його сумою: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$.

В протилежному випадку, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує або нескінченна, ряд називається розбіжним.

Властивості збіжних рядів.

Відзначимо основні властивості рядів.

- 1) Якщо збігається ряд, одержаний з даного ряду відкиданням декількох його членів, то збігається і сам даний ряд. І навпаки: якщо збігається даний ряд, то збігається і ряд, одержаний з даного відкиданням декількох членів.

Дійсно, якщо S_n – сума n перших членів ряду (1), c_k – сума k відкинутих членів, δ_{n-k} – сума членів ряду, що входять в суму S_n і не входять в c_k , то $S_n = C_k + \delta_{n-k}$. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n-k}$, то існує і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, і навпаки. Таким чином, на збіжність ряду не впливає відкидання скінченного числа його членів.

- 2) Якщо ряд (1) збігається і його сума дорівнює S , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots,$$

де c – яке-небудь фіксоване число, також збігається і його сума дорівнює cS .

Розглянемо достатні ознаки збіжності ряду, які використовують лише вирази для його членів.

Ознака Даламбера. Нехай дано ряд $(1')$ з достатніми членами. Якщо при $n \rightarrow \infty$ існує границя відношення наступного члена до попереднього $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, що дорівнює l :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l;$$

то при $l < 1$, ряд збігається, (при $l > 1$ – як збіжним, так і розбіжним).

Практичне завдання: Завдання 1. Написати перші п'ять членів ряду за заданим загальним членом.

1. $a_n = \frac{1}{n^2 + 3};$

4. $a_n = \frac{2^n}{n^n};$

2. $a_n = \frac{n^2}{3^n + n};$

3. $a_n = \frac{3^n}{1 + 3^{2n}};$

Завдання 2. Знайти формулу загального члена ряду:

1. $1 + \frac{8}{2} + \frac{27}{6} + \frac{64}{24} + \frac{125}{120} + \dots$

3. $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$

2. $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \dots$

4. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$

Завдання 3. Встановити чи може ряд бути збіжним за необхідною ознакою збіжності ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{2n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{3n-1}$$

Завдання 4. Дослідити ряд на збіжність використовуючи ознаку порівняння рядів.

$$1. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n 2^n} + \dots$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^n} + \dots$$

$$3. \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{2}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{4 \cdot 2^4} + \dots + \frac{n}{(n+1)2^{n+1}} + \dots$$

$$4. 0.001 + (0.001)^2 + (0.001)^3 + \dots + (0.001)^n + \dots$$

Завдання 5. Дослідити ряд на збіжність використовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n+1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$$

Семінарське заняття 12

Тема. Комбінаторика

Питання для усного опитування та дискусії

1. Скінчені множини. Елементи комбінаторики.
2. Основні поняття комбінаторного аналізу.
3. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями.
4. Правила добутку та суми.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями
Перестановки, розміщення, комбінації без повторень

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є :

Пригадаємо основні правила за якими виконують вибір тієї чи іншої комбінаторної формули в обчисленнях. Вам необхідно їх вивчити, щоб вільно застосовувати на практиці та не тлумачити як захочеться формули розміщень, перестановки та комбінації.

Елементи комбінаторики

Відомо два базових правила, за якими приймають рішення: якою формулою комбінаторики слід користуватися?

Чи це будуть комбінації, перестановки чи розміщення залежить від відповіді на два питання.

1) Чи враховується порядок розміщення елементів?

Якщо відповідь «ні» то застосовуємо формулу комбінацій.

Якщо «так», то маємо два варіанти, які залежать від відповіді на наступне питання:

2) Чи всі елементи входять у сполуку?

Якщо «так» то обчислюємо через перестановки, якщо «ні» застосовуємо формулу розміщень.

Щоб легше запам'ятались ці правила наведемо наступний рисунок, вивчивши який у Вас не виникатиме труднощів з основними комбінаторними задачами.

Вибір формули для обчислення кількості сполук



Правила комбінаторного додавання та комбінаторного множення

Правило комбінаторного множення є частковим випадком основного правила комбінаторики: Нехай необхідно виконати послідовно n дій. При цьому першу дію можна виконати k_1 способами, другу — k_2 способами і так далі до m -ї дії, яку можна виконати k_m способами. Тоді всі m дій можна виконати $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot k_m \cdot \dots \cdot k_m$ способами.

Варіант 1

1. Скількома способами можна вибрати 4 яблука із 10? (3 бали)
2. Скількома способами можна розподілити 3 різних путівки між 25 учнями? (3 бали)
3. Скількома способами можна сформувати поїзд з 8 вагонів? (3 бали)
4. Обчисліть: $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Варіант 2

1. Скількома способами можна розподілити 3 однакових путівки між 25 учнями? (3 бали)
2. У класі навчається 10 юнаків. Скількома способами можна їх вишикувати у шеренгу?
3. Скількома способами із 20 студентів групи можна обрати голову, заступника голови і секретаря зборів?
4. Обчисліть: $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Відповіді: 1. $C_{10}^4 = 219$. 2. $A_{25}^3 = 13\,800$. 3. $P_8 - 8! = 40\,320$. 4. 22.

2. $C_{25}^3 = 2300$. 2. $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$. 3. $A_{20}^3 = 6840$. 4. 16.

Визначте вид сполуки, про яку йдеться мова в задачі, та запишіть відповідну формулу:

1. а) 25 викладачів потиснули один одному руки перед конференцією.. Скільки було зроблено рукоштовань?
- б) 25 студентів обмінялися фотографіями так, що кожний обмінявся з кожним. Скільки було роздано фотографій?

Відповіді: а) $C_{25}^2 = 300$; б) $A_{25}^2 = 600$.

2. а) У групі з 32 студентів вибирають делегацію на конференцію, яка складається з трьох осіб. Скільки існує варіантів такого вибору?

- б) У класі з 25 студентів для проведення зборів обирають голову, заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

Відповіді: а) $C_{32}^2 = 4960$; б) $A_{12}^2 = 29\,760$.

3. а) Біля стола стоїть 9 стільців. Скільки існує способів розміщення за столом 9 осіб?
б) 9 дівчат водять хоровод. Скільки існує для них різних варіантів стати в коло?
в) 3 дев'яти різних намистин потрібно зробити намисто. Скільки існує різних способів його утворення?

Відповіді: а) $P_9 = 9!$; б) $\frac{P_9}{9}$ (кількість хороводів у 9 раз менша від P_9 , бо циклічні перестановки не змінюють хоровод); в) $\frac{P_9}{9 \cdot 2}$ (циклічні перестановки не змінюють намисто, а також намисто не зміниться, якщо перевернути його).

Задача. У групі 12 хлопців і 10 дівчат.

- а) Скількома способами можна вибрати одного студента цього класу?
б) Скількома способам двох — хлопця і дівчину?
в) Скількома способами можна вибрати дівчину?
г) Уже вибрано одного студента. Скількома способами можна вибрати після цього хлопця і дівчину?

Виконання вправ

1. 7 книг різних авторів і трьохтомник одного автора розташовані на книжковій полиці. Скількома способами можна розставити ці 10 книжок на полиці так, щоб книги автора трьохтомника стояли поруч?
Відповідь: $P_3 \cdot P_8 = 241\,920$.
2. Збори з 30 осіб обирають голову, секретаря та трьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?
Відповідь: $A_{30}^2 \cdot C_{28}^3 = 2\,850\,120$.
3. У підрозділі 60 солдат і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити наряд, який складається із трьох солдат і одного офіцера?
Відповідь: $C_{60}^3 \cdot C_5^1 = 171\,100$.
4. Із 10 троянд і 8 жоржин треба скласти букет так, щоб в ньому були 2 троянди і 3 жоржини. Скількома способами можна скласти букет?
Відповідь: $C_{10}^2 \cdot C_8^3 = 2520$.
5. Із семи бігунів і трьох стрибунів треба скласти команду із 5 чоловік, в яку б входив хоч би один стрибун. Скількома способами це можна зробити?
Відповідь: $C_7^4 C_3^1 + C_7^3 C_3^2 + C_7^2 C_3^3 = 231$.

Семінарське заняття 13

Тема. Основи теорії ймовірності

Питання для усного опитування та дискусії

1. Основні поняття теорії ймовірностей.
2. Теореми додавання і множення ймовірностей. Наслідки.
3. Формули повної ймовірності та Байєса. Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: ймовірність, повна ймовірність, випадкові величини, закон розподілу

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Ймовірністю випадкової події називається відношення кількості елементарних подій, що сприяють цій події до загальної кількості подій простору елементарних подій.

Теорема: Ймовірність події А, яка може настати лише за умови появи однієї із попарно не сумісних подій повної групи Н, визначається за формулою:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A),$$

або

$$P(A) = \sum P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Формула називається формулою повної ймовірності. Події H_i називають гіпотезами;

$P(H_i)$ – ймовірність гіпотез.

Задача 1. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^2$). Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 ($m = C_{12}^2$).

Отже, якщо подія А — «вийнято дві білі кульки», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{33}{95}.$$

Задача 2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює $n = C_{20}^3$.

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^2 способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^2 \cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{44}{95}.$$

Задача 3. В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із $15 + 9 + 6 = 30$ кульок можна $n = C_{30}^6$ способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_6^1 способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_9^2 способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^3 способами. Отже, події А сприяють $m = C_6^1 \cdot C_9^2 \cdot C_{15}^3$ елементарних подій. Тоді

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$$

Відповідь: $\frac{24}{145}$.

Розв'язування завдань:

Завдання 1 Навмання складається букет із трьох квіток. Серед квіток є 6 айстр, 5 троянд та 3 ромашки.

Знайти ймовірність того, що букет складається:

- а) із трьох троянд;
- б) із трьох ромашок;
- в) із 1 троянди, 1 ромашки та 1 айстри.

Завдання 2 Студент знає 20 питань із 25 програми. Знайти ймовірність, що студент із трьох запитань відповів:

- а) на одне запитання;
- б) на всі запитання;
- в) не відповів на жодне.

Завдання 3. На контроль надійшли вироби, які виготовлені трьома робітниками. Перший виготовив 20 виробів, серед яких 4% браку, другий – 30 виробів, в яких 1% браку, а третій – 50, серед яких 5% браку. Взята навмання деталь виявилась бракованою.

Знайти ймовірність того, що виріб виготовив 3-й робітник.

Завдання 4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 народжених:

- а) рівно 50 хлопчиків;
- б) не менше 30 і не більше 70.

Завдання 5. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що за зміну не буде випущено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Знайдіть ймовірність того, що за три зміни не буде випущено жодної нестандартної деталі.

6. А)Скількома способами можна скласти розклад перездачі 5 заліків.

Б)У спортивній команді, яка складається з 22 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

В)Скількома способами можна розмістити 6 хлопців та 7 дівчат у гуртожитку в тримісній, чотиримісній та ще двох 3місних кімнатах.

Семінарське заняття 14

Тема. Основні поняття математичного програмування. Тема. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача математичного програмування.
2. Цільова функція.
3. Ресурсні обмеження.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : математичне програмування, модель, цільова функція, ресурсні обмеження, ключовий рядок, ключовий стовпчик, генеральний елемент.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — детерміновані задачі і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням μ і дисперсією D , то така задача є стохастичною.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рисунку (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

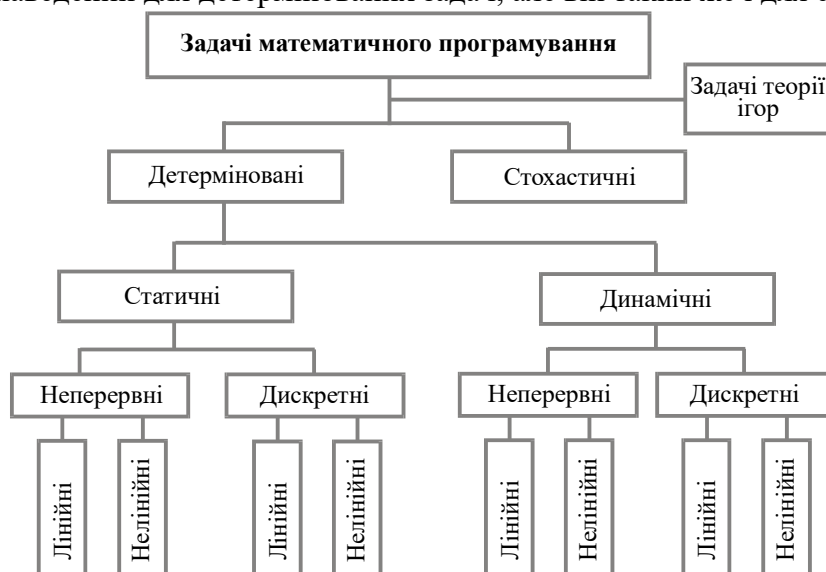


Рисунок Класифікація задач математичного програмування

Багатокомпонентність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може значно ускладнити процес відображення мети та обмежень в аналітичному вигляді. Тому

виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатнім ступенем точності адекватно відобразили реальну дійсність. Незважаючи на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати в процесі аналізу реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуваних систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження. Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель — алгоритм — програма.



Узагальнена схема процесу
економіко-математичного моделювання

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l).$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так: знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max (\min) F^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l).$$

	A	B	C	D	E
1	Характер	Вміст речовини в 1 кг сировини	Норми		
2	речовини	буряк	морква	капуста	споживання
3	A	3	2	4	710
4	B	0,3	0,4	0,2	73
5	C	20	15	10	3550
6	Вартість	0,4	0,5	0,4	
7	Математична модель				
8	Змінні	x1	x2	x3	
9	Значення к-ть	228	11	1	
10	Цільова функція				
11		35			
12	Обмеження	Значення			
13		710	710		
14		73	73		
15		3550	3550		

Семінарське заняття 15

Тема. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП

Питання для усного опитування та дискусії

1. Лінійне програмування. Економічні приклади ЗЛП.
2. Геометричний спосіб розв'язування ЗЛП.
3. Симплекс-метод розв'язування ЗЛП.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : лінійне програмування, цільова функція, обмеження, геометричний спосіб розв'язування ЗЛП, симплекс-метод, ключовий рядок, ключовий стовпчик.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

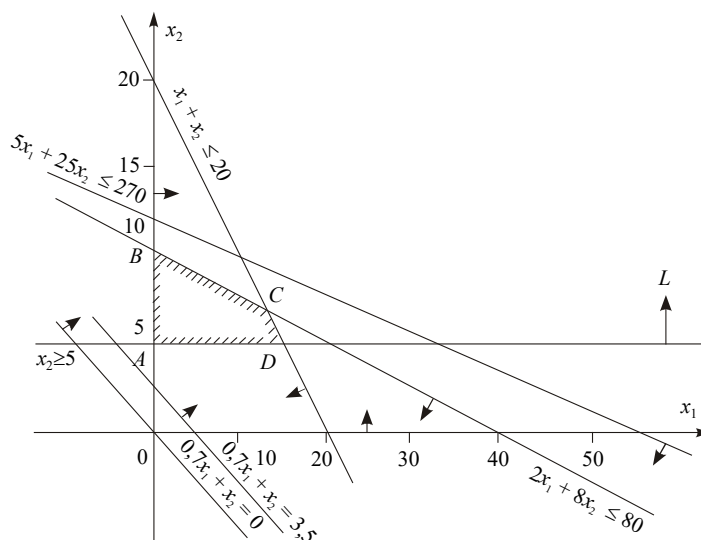
Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ – так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max (\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

за умов:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рисунку:



Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконаємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \leq 20$. Цей факт на рис.3.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (3.10)—(3.13). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис.3.2 – чотирикутник $ABCD$). Цільова функція $Z = 0,7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z . Зокрема, якщо $Z=0$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z=3,5$, то маємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

17	=SUMPRODUCT(B7:E7,B5:D5)/B5:D5						
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2						Розрахункове	не більше
3	обмеження 1	3	10	0	0	3	3
4	обмеження 2	9	0	8	-8	3	3
5	обмеження 3	10	2	1	-1	1.727272727	2
6	обмеження 4	2	0	3	-3	1	1
7	Цільова ф-ція	15	25	10	-50	10.90909091	
8							
9		0.091	0.273	0.273	0		
10		y1	y2	y3	y4		
11							

Семінарське заняття 16

Тема Транспортна задача.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Постановка транспортної задачі.
2. Побудова початкового опорного плану.
3. Розрахунок потенціалів.
4. Перевірка плану на оптимальність.
5. Цикл перерахунку транспортної задачі.
6. Задачі, що розв'язуються за транспортним алгоритмом.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : транспортна задача, метод північно-західного кута, опорний план, метод потенціалів, ринання балансу, оптимальність, цикл перерахунку, транспортний алгоритм.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного товару із M — пунктів відправлення $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в N — пунктів призначення $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. При цьому в якості критерію оптимальності беруть мінімальну вартість на перевезення всього товару або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу в якості критерію оптимальності якої взято мінімальну вартість перевезення. Позначимо через C_{ij} — тарифи на перевезення одиниці товару з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення. Через a_i — запаси товару в i -му пункті відправлення; b_j — потреби в товарі у j -му пункті призначення. Через X_{ij} — кількості товару, який потрібно перевезти з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

при умовах:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Оскільки змінні X_{ij} — задовільняють систему лінійних рівнянь і умову, то ми можемо забезпечити доставку необхідної кількості товару в кожний із пунктів призначення.

Означення 1: будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь, який записується у вигляді матриці $X = (x_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ — називається планом транспортної задачі.

Означення 2: план $X^* = (x_{ij}^*)(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, при якому функція приймає своє мінімальне значення називається оптимальним планом транспортної задачі.

Початкові дані транспортної задачі записуються у вигляді таблиці:

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	
...	...	...	...	...	...	...
A_i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	
...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Оскільки, транспортна задача представляє собою частковий випадок задачі лінійного програмування тому розв'язання транспортної задачі з використанням надбудови «Розв'язувач» в цілому практично нічим не відрізняється від розв'язання задачі лінійного програмування, окрім того, що таблична модель транспортної задачі має

	A	B	C	D	E	F
1	Транспортна задача					
2						
3	Матриця вартості		Споживачі			
4						
5	Постачальники	B1	B2	B3		
6	A1					
7	A2					
8	A3	Матриця вартості				
9	A4					
10	A5					
11						
12	Матриця рішень					
13			Споживачі			
14	Постачальники	B1	B2	B3	Сума запасів	Запаси
15	A1					
16	A2				Формули	
17	A3	Матриця рішення			обмежень за	
18	A4				запасами	
19	A5					
20	Сума споживання	Формули обмежень за споживанням				
21	Споживання					
22						
23			Цільова функція			
24						

свою форму.

1.4. Самостійна робота студентів

Самостійна робота студента є однією з основних складових оволодіння навчальним матеріалом і виконується в позааудиторний час, передбачений тематичним планом навчальної дисципліни.

Під час вивчення навчальної дисципліни студенти повинні навчитися самостійно мислити, поглиблювати засвоєні теоретичні знання, опановувати практичні навички з організації праці менеджера. Розв'язки завдань повинні бути стисло законспектовані у зошиті.

Студенти виконують самостійну роботу індивідуально з одержанням необхідних консультацій від науково-педагогічного працівника протягом семестру. Форма контролю – перевірка самосійних робіт. Завдання самостійної роботи виносяться на підсумковий семестровий контроль.

Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером (в журналі) та параметром k .

Перша частина:

1. Обчислити визначники двома способами:

а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця)

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Знайти добуток матриць AB і BA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти границі функції, які відповідають Вашому варіанту.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

5. Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1

$$1. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$$

$$2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$$

$$3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$$

$$4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$$

$$5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$$

$$6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$$

$$7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$$

$$8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$$

$$9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt{x^2} + 6\sin x.$$

$$10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$$

$$11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x.$$

$$12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$$

$$13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\operatorname{arctg} x.$$

$$14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

$$16. y = \operatorname{tg}(3x^2 + x - 2).$$

$$17. y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1).$$

$$18. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}.$$

$$19. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}.$$

$$20. y = \arccos(3x^2 + 5).$$

6. Обчислити інтеграли:

$$1. \int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx.$$

$$2. \int (4x^3 - 5e^x + 1) dx.$$

$$3. \int \left(\frac{3}{4}\sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx.$$

$$4. \int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4\operatorname{tg} x - 9 \right) dx.$$

$$5. \int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx.$$

$$6. \int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$7. \int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + 3) dx.$$

$$8. \int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx.$$

$$9. \int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx.$$

$$10. \int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx.$$

$$11. \int \left(5x - 3\operatorname{ctg} x + \frac{4}{x^3} \right) dx.$$

$$12. \int \left(4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx.$$

$$13. \int \left(x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx.$$

$$14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx.$$

$$15. \int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx. \quad 16. \int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx.$$

$$17. \int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$18. \int (3x^2 - 5\operatorname{tg} x + 2) dx.$$

$$19. \int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx.$$

$$20. \int \left(5x^4 + 4\sin x - \frac{2}{x} \right) dx.$$

Індивідуальні завдання

З цієї навчальної дисципліни можливе (за бажанням студента) виконання наукових робіт за наступною орієнтовною тематикою:

Теми рефератів

1. Способи розв'язування систем рівнянь.
2. Розв'язування вправ з аналітичної геометрії.
3. Границя функції однієї і двох змінних.
4. Застосування диференціального числення.
5. Дії з комплексними числами.
6. Основні прийоми інтегрування.
7. Ознаки збіжності числових рядів.
8. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків.
10. Елементи комбінаторики (розв'язування вправ).
11. Основні теореми теорії ймовірностей.
12. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
13. Приклади задач математичного програмування.
14. Задачі дослідження операцій.
15. Розв'язування вправ на СМО.
16. Ігрові задачі з умовами невизначеності та ризику.
17. Основні прийоми розв'язання задач логістики.
18. Використання векторної алгебри, теорії матриць і визначників у економіці.
19. Відшукування границь послідовностей.
20. Застосування похідної в економіці.
21. Задачі лінійного програмування.
22. Задачі, що розв'язуються за транспортним алгоритмом.
23. Задачі цілочислового програмування.
24. Моделі управління запасами.
25. Методи сітьового планування і управління.
26. Дослідження економічних моделей з урахуванням ризику.

Як альтернатива - створення презентації за матеріалами фільму чи відео на обрану тему наприклад Стрічка Мебіуса, або відео про Числа, Математичні Теорії, Математику, відомого Математика/Математичку, чи цікаве відео про задачі тисячоліття. Приклади:

"Життя відомих людей і математика"

● Завдання: Оберіть фільм, що розповідає про життя відомого математика (наприклад, "A Beautiful Mind" про Джона Наша чи "The Imitation Game" про Алана Тьюрінга).

Завдання для презентації:

- Висвітліть ключові етапи в житті обраного математика.
- Зосередьте увагу на важливих подіях та досягненнях, які вплинули на його математичну кар'єру.
- Порівняйте події у фільмі з реальним життям та визначте, наскільки вони відповідають дійсності.

Математика у фільмах:

- Завдання: Оберіть фільм або серіал, в якому математика відіграє важливу роль (наприклад, "Гарвардські чемпіони" тощо).
- Завдання для презентації:
- Розкажіть про концепції математики, які використовуються у фільмі.
- Зіставте математичні концепції у фільмі з реальними сценаріями або прикладами.
- Обговоріть, як математика впливає на розвиток сюжету та розвиток персонажів.

“Презентація Цікаві факти про число”

Подайте історію відкриття та вивчення числа (Наприклад Число e - Золотого Перерізу. Число Планка (h): Квантова Механіка та Мікросвіт"

"Число Авогадро (N_A): Молекули та Макросвіт" "Число Фейгенаума (Φ): Інша Сторона Золотого Перетину"

Дослідіть застосування такого числа у природі, архітектурі науці чи мистецтві. Розгляньте його властивості.

1.5. Підсумковий контроль

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі усно-письмового екзамену.

1.5.1. Питання для підсумкового контролю

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості.
2. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення
3. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовбця).
4. Обчислення визначників довільного порядку
5. Визначення матриці, їх види
6. Дії над матрицями
7. Обернена матриця та її знаходження
8. Економічні задачі з використанням теорії матриць
9. Системи лінійних рівнянь
10. Метод Крамера.
11. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь
12. Метод Гаусса та Жордано-Гауса
13. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції.
14. Класифікація функцій. Основні функції та їх графіки
15. Умови зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції на відрізьку.
16. Поняття екстремуму функції. Необхідні та достатні умови екстремуму.
17. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегику. Необхідні і достатні умови їх існування на графіках функції.
18. Асимптоти графіка функції, їх знаходження. Повне дослідження функції та побудова її графіка.
19. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.
20. Границя функції в точці. Поняття про односторонні границі
21. Основні теореми про границі функцій.
22. Перша і друга визначні границі
23. Визначення неперервної функції в точці. Класифікація точок розриву
24. Властивості неперервних функцій на відрізьку
25. Означення похідної. Геометричний зміст похідної.
26. Фізичний та економічний зміст похідної
27. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції
28. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій
29. Похідна від складної функції. Похідна від оберненої функції. Похідні від обернених тригонометричних функцій.
30. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.
31. Означення диференціала. Геометричний зміст диференціала. Основні властивості диференціала
32. Еластичність функції та її властивості. Еластичність попиту відносно ціни. Еластичність пропозиції відносно ціни.
33. Первісна функції та її властивість
34. Невизначений інтеграл та його властивості
35. Таблиця невизначених інтегралів.
36. Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування.
37. Методи інтегрування: метод підстановки та інтегрування частинами
38. Поняття раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
39. Інтегрування правильних раціональних дробів. Інтегрування неправильних раціональних дробів.

40. Поняття визначеного інтегралу та його властивості.
41. Основні поняття про диференціальні рівняння.
42. Диференціальні рівняння першого порядку.
43. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння.
44. Диференціальні рівняння другого порядку
45. Числовий ряд та його збіжність.
46. Необхідна та достатня ознаки збіжності числового ряду. Ознака порівняння рядів.
47. Лінійне програмування.
48. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП
49. Оптимізаційні економіко-математичні моделі
50. Транспортна задача. Метод потенціалів

1.5.2. Структура екзаменаційного білета

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості
2. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій.
3. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k - 2)x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Обчислити інтеграл (метод заміни змінної) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

2.Схема нарахування балів

2.1. Нархування балів студентам з навчальної дисципліни здійснюється відповідно до такої схеми:

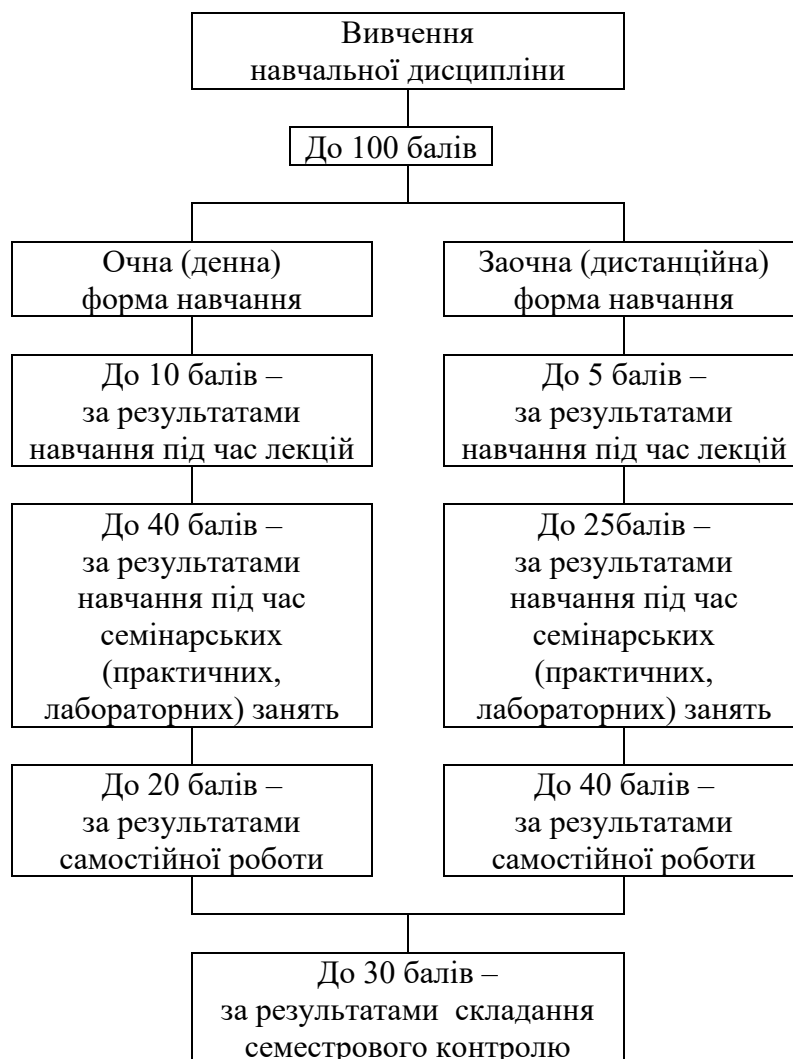


Рис. 1. Схема нарахування балів студентам за результатами навчання

2.2. Обсяг балів, здобутих студентом під час лекцій з навчальної дисципліни, обчислюється у пропорційному співвідношенні кількості відвіданих лекцій і кількості лекцій, передбачених навчальним планом, і визначається згідно з додатками 1 і 2 до Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 16 лекційних занять за денною формою навчання.

Отже, студент може набрати під час лекцій таку кількість балів:

Кількість лекцій за планом	Кількість відвіданих лекцій																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Консультація до іспиту
16	0,5	1,3	1,9	2,5	3,1	3,8	4,4	5	5,6	6,3	6,9	7,5	8,1	8,8	9,4	10	

2.3. З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 16 семінарських занять за денною формою навчання.

За результатами семінарського (практичного, лабораторного) заняття кожному студенту до відповідного документа обліку успішності виставляється кількість балів від 0 до 5 числом, кратним 0,5, яку він отримав протягом заняття.

Критерії поточного оцінювання знань студентів наведені у п.4.3.8. Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права (затвердженого 29 травня 2017 року, протокол № 14).

2.4. Перерозподіл кількості балів в межах максимально можливої кількості балів за самостійну роботу студентів та виконання індивідуальних завдань, наведено в наступній таблиці:

№ з/п	16 тем	Номер теми										Усього балів
		1-2	3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14	15	16	
1.	Максимальна кількість балів за виконання завдання самостійної роботи	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	14
2.	Максимальна кількість балів за індивідуальне завдання	6										6
	Усього балів	-										20

2.5. За семестровий контроль, що проводиться у формі семестрового екзамену з навчальної дисципліни студент може максимально одержати 30 балів. Шкала визначення кількості балів та критерії оцінювання знань студентів за результатами семестрового контролю подана у табл. 4.8 Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

Перерозподіл балів, в межах максимально можливого одержання їх кількості за надані студентами відповіді в усній формі на завдання екзаменаційного білета, наведено в таблиці.

№ з/п	Алгоритм нарахування балів	Номер питань екзаменаційного білета			Разом балів
		1	2	3	
1.	Максимальна кількість балів за відповідь на питання білету	5	10	15	30,0

3. Рекомендовані джерела

3.1. Основні джерела

1. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. 2019.
URL:<http://www.dut.edu.ua/ru/lib/1/category/725/view/1883>
2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
URL:<https://app.box.com/s/dwv9reh2y2eek18zynw2pn8xohruvm2i>
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. К.:Видав.центр Альматеор, 2003. 520 с.
URL:<http://lib.istu.edu.ua/index.php?p=34&id=1134&par=223&page=1>
4. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. К. : Ігнатекс-Україна, 2013. 150 с.
5. Гречнева М. О., Стеганцева П. Г. Вища математика : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра другої предметної спеціальності «Середня освіта (Інформатика)». Запоріжжя : ЗНУ, 2023. 154 с.
6. Дюженкова О.Ю. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О.Ю. Дюженкова, М.Є. Дудкін, І.В. Степахно. К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. 409 с. Бібліогр.: 409 с.
URL <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/e193d048-1bd7-4120-b86a-f65337aa5493/content>
7. Кацала Р.А. Математика для економістів (Методичні вказівки до практичних занять для студентів економічних спеціальностей). Ч. 2. Теорія ймовірностей і математична статистика / Уклад.: Р.А. Кацала, Ю.Ю. Млавець, О.О. Синявська, М.М. Шаркаді. Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2024. 60 с.
8. Рудницький В.Б. Вища математика: навчальний посібник / В.Б. Рудницький, В.І. Делей. Хмельницький, 2004. 308с.
URL:<https://studfile.net/preview/5064960/>
9. Чемерис О. Вища математика : навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи здобувачів нематематичних спеціальностей. Частина 1. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 49 с.
10. Хом'юк, І. В. Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
11. Хом'юк, І. В. Вища математика. Ч. 1. Функції багатьох змінних : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с. ISBN 978-966-641-799-5
12. Шелестовський Б.Г. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б.Г., Габрусєв Г.В., Габрусєва І.Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.

3.2. Допоміжні джерела

13. Булдигін В.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К. : ТВіМС, 2021. 224 с.
URL: <http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf>
14. Денисенко Н.Л. Вища математика. Елементи лінійної і векторної алгебри, аналітична геометрія. Практикум: навч. посіб. КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 168 с.
URL: <https://ela.kpi.ua/bitstreams/d90613a4-0079-47dd-bb6a-8f482ec9ee70/download>

15. Нечипоренко Н.О. Індивідуальні розрахунково-графічні завдання з дисципліни «Вища математика» для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Нечипоренко Н.О. – Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка”, 2024. – 54 с.
16. Вища математика. Модуль 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / Антоненко В.Ф., Ключ І.С., Горідько Р.В., Чуб Л.О. К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 300 с.
17. Вища математика. Модуль 2. Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / Крисак Я.В., Левковська Т.А., Горідько Р.В. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2006. 284 с.
18. Вища математика. Модуль 3. Невизначений та визначений інтеграли: Навч. посібник / Ластівка І.О., Коновалюк В.С., Ковтонюк І.Ю. [та ін.] К. : НАУ-друк, 2007. 208 с.
19. Лубенська Т.В. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / Т.В. Лубенська, Л.Д. Чупаха, В.І. Трофименко К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. 116 с.
20. Грищенко В.О., Юхименко А.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: навчальний посібник / В.О. Грищенко, А.І. Юхименко. К.: Київський національний торгово-економічний університет, 2000. 168с.
21. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: навчальний посібник/ С.І. Наконечний, С.С. Савіна. К.: КНЕУ, 2003. 452с.

4. Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Офіційний сайт Електронна платформа вищої математики, математичного моделювання та фізики URL: <https://duikt.edu.ua/ua/>
2. Офіційний сайт Інституту економіки та прогнозування Національної академії наук України. URL: <http://ief.org.ua>
3. Офіційний сайт Інституту економічних досліджень та політичних консультацій. URL: <http://www.ier.com.ua>
4. Офіційний сайт Міжнародного валютного фонду. URL: <http://www.imf.org/external/>
5. Офіційний сайт Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України. URL: <http://www.me.gov.ua>.